Un critère de diagonalisabilité

Leçons concernées : 153

Proposition 1. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel strict de E stable par f. En notant $g = f|_F$ la restriction de f à F, on a que g est dans $\mathcal{L}(E)$ et que χ_g divise χ_f.*

Démonstration.

Soit $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_r)$ une base de F, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ avec } A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(g)$$

On obtient alors :

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} A - XI_r & C \\ 0 & B - XI_{n-r} \end{vmatrix} = \chi_g(X) \cdot \det(B - XI_{n-r})$$

□

Proposition 2. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une racine de χ_f de multiplicité h, alors $\dim E_\lambda \leqslant h$.*

Démonstration.

On applique la proposition précédente pour $F = E_\lambda$.
On a que $g = f|_{E_\lambda} = \lambda Id_{E_\lambda}$, donc $\chi_g(X) = (X - \lambda)^{\dim E_\lambda}$.
Comme χ_g divise χ_f, on a que $\dim E_\lambda \leqslant h$. □

Théorème 3. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est diagonalisable

(ii) χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$, et toute racine λ est de multiplicité $\dim E_\lambda$.

(iii) Il existe des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de f vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

Démonstration.

Étape 1 : Montrons que $(i) \Rightarrow (ii)$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de f, et soit $\mathcal{B}$ une base de vecteurs propres.
Comme f est diagonalisable, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{h_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{h_r} \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$$

Ainsi, $h_i = \dim E_{\lambda_i}$ et $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{h_i}$.

Étape 2 : Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$.

On écrit $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{h_i}$.

On a $F = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} \subseteq E$. De plus :

$$\dim F = \sum_{i=1}^{r} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{r} h_i = \deg \chi_f = n = \dim E$$

On a donc $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$.

Étape 3 : Montrons que $(iii) \Rightarrow (i)$.

Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i}, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ une base de vecteurs propres.
Comme $f|_{E_{\lambda_i}} = \lambda_i Id_{E_{\lambda_i}}$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{h_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r I_{h_r} \end{pmatrix}$$

donc f est diagonalisable.

□

Application 4. *Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ ses valeurs propres, et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_r}$ les sous-espaces propres associés.
Soit alors $P(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)$, qui est scindé à racines simples. De plus, par le lemme des noyaux :

$$\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E) = \bigoplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i} = E$$

Ainsi $P(f) = 0$.

($\Leftarrow$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de f, scindé à racines simples.
On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines de P, alors par le lemme des noyaux, on a :

$$E = \mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i Id_E)$$

f est donc diagonalisable.

□

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition